2016

Examen corrigé
Échantillonnage & Estimation

Rattrapage 2013-2014 | EG3

Professeur : M.

Corrigé disponible sur www.mafacdeco.com et www.koulyati.com

Issam EZZAHRAOUI

23/11/2016

Contrôle Final 2014
Rattrapage

①

Exo I

On a :

$$M_{ax+b}(t) = E\left(e^{t(ax+b)}\right)$$

$$M_{ax+b}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tax+tb} \cdot p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e^{tax_i} \cdot e^{tb} \cdot p_i$$

$$= e^{tax_1} \cdot e^{tb} + e^{tax_2} \cdot e^{tb} + \cdots + e^{tax_n} \cdot e^{tb}$$

$$= e^{tb} \sum_{i=1}^{n} e^{tax_i} \cdot p_i$$

donc : $M_{ax+b}(t) = e^{tb} \cdot M_x(at)$

avec : $M_x(at) = E\left(e^{tax}\right) = \sum_{i=1}^{n} e^{tax_i} \cdot p_i$

Exo II :

On a :

$$L(k_1, k_2 \ldots k_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(K = k_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k_n}}{k_n!}$$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!} = \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum_1^n k_i}}{k_1! \cdots k_n!}$$

$$\log\left(L(k_1, k_2 \ldots k_n, \lambda)\right) = \log\left(\frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum_1^n k_i}}{k_1! \cdots k_n!}\right)$$

2

$= \log\left(e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum k_i}\right) - \log(k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!)$

$= -n\lambda + \log\left(\lambda^{\sum k_i}\right) - \log(k_1! \cdots k_n!)$

$= -n\lambda + \sum k_i \log(\lambda) - \log(k_1! \cdots k_n!)$,

$\Rightarrow \dfrac{\partial \log(k_1 \ldots k_n; \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow (-n\lambda)' + \left(\sum k_i \log(\lambda)\right)' - \underbrace{\left(\log(k_1! \cdots k_n!)\right)'}_{0}$

$\Rightarrow -n + \sum k_i \times \dfrac{1}{\lambda} = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{\sum k_i}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{\sum k_i}{\lambda} = \dfrac{\sum x_i}{\lambda} = \hat{\lambda}$ avec : $k_i = x_i$

on trouve :

donc : $\lambda = \hat{\lambda} = \bar{X}$

EXO III

a) On a : $\sigma^2 = 4$; $\bar{X} = 11$; $n = 7$; $\alpha = 0,95$

puisque l'écart type de la population est connu

donc $\bar{X}$ suit une loi Normale :

donc :

$IC = \left[\bar{X} - t_\alpha \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_\alpha \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

• on cherche d'abord à t_α :

on sait que — seuil de confiance

$2\Pi(t_\alpha) - 1 = (1 - \alpha)$

$\Rightarrow 2\Pi(t_\alpha) - 1 = 0,95 \Rightarrow 2\Pi(t_\alpha) = 1,95 \Rightarrow \Pi(t_\alpha) = 0,975$

Après la table de la loi Normale CR on trouve : (3)

$t_\alpha = 1{,}96$

donc :

$$IC = \left[11 - 1{,}96 \times \frac{2}{\sqrt{7}} ; 11 + 1{,}96 \times \frac{2}{\sqrt{7}} \right]$$

$$IC = [\, 9{,}52 ; 12{,}48 \,]$$

(b) l'estimateur ponctuel de la variance :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_e^2$$

$$S^2 = \frac{10}{9} \times (3{,}5)^2 = 13{,}61$$

avec $n = 10$; $\bar{X} = 12$; $\sigma_e = 3{,}5$

(c) Intervalle de confiance ; $\alpha = 0{,}95$; $\bar{X} = 12$; $n = 10$

$$IC = \left[\bar{X} - t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

on a σ_p inconnu est $n = 10 < 30$ donc

$\bar{X}$ suit une loi de Student $(n-1)$ d.d.l

on cherche t_α : Après la table de Student est $S = \sqrt{13{,}61}$

on trouve que : $t_\alpha = 2{,}262$ $S = 3{,}69$

donc :

$$IC = \left[12 - 2{,}262 \times \frac{3{,}69}{\sqrt{10}} ; 12 + 2{,}262 \times \frac{3{,}69}{\sqrt{10}} \right]$$

$$IC = [\, 9{,}36 ; 14{,}64 \,]$$

Student

4

ⓒ on a l'amplitude de l'intervalle de confiance est égale 2 ; avec : $\alpha = 0{,}95$; $\sigma^2 = 4$

donc :

$$2 \times t_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$$

$$2\sqrt{n} = 2 \times t_\alpha \times \sigma \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \times t_\alpha \times \sigma}{2}$$

$$\Rightarrow n = (t_\alpha \times \sigma)^2 \Rightarrow n = (1{,}96)^2 \times 4$$

on a $t_\alpha = 1{,}96$ Après la table Normale.

donc : $n = 15{,}4$

En corrigeant 16 copies, l'enseignant peut situer la moyen de ses étudiants.

EXO IV

on a : $\bar{X} = 8$; $\alpha = 0{,}05$

H_0 : $m = m_0 = 7$

H_1 : $m \neq m_0$

$n = 16$

puisque : X suit une loi Normale, $n < 30$ et σ inconnu

Alors la statistique :

$$\bar{X} = \frac{\bar{X} - m_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \text{Student}(n-1) \text{ ddL}$$

puisque H_1 : $m \neq m_1$ alors il s'agit d'un test bilatéral

$$I_{acc} = \left[m_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}} ; m_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

avec ! $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{45}{15} = 3$

Après la T de student on trouve $t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}131$. donc :

$$I_{acc} = \left[7 - 2{,}131 \times \frac{1{,}73}{\sqrt{16}} ; 7 + 2{,}131 \times \frac{1{,}73}{\sqrt{16}}\right]$$

$$I_{acc} = [6{,}08 ; 7{,}92]$$

puisque $\bar{X} \notin I_{acc}$ donc on refuse H_0 et on accepte H_1.

Bon courage

issam